

## I 退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用

Construction of the fundamental solution for degenerate parabolic operators and its applications

岩崎千里  
Iwasaki, C.

退化した放物型方程式の基本解の構成に関しては、2次の退化の場合にのみしか詳しい形が分かっていない。この正確な形を利用して種々の熱作用素に対する基本解を得ることができる。その一つとして、2011年9月に完成した球面上の退化した楕円型作用素についての共同研究の結果の論文が出版された。さらに、この基本解の応用を Fokker-Planck 方程式に試みて、基本解の構成とともに固有関数展開についての結果を得た。これを2012年フィンランドの国際研究集会で発表し、論文として掲載された。さらに、これまで得られた結果を総合して2013年9月日本数学会函数解析分科会で特別講演として報告した。

## II Grushin 型作用素に対する基本解の構成

Construction of a fundamental solution of operators of Grushin type

岩崎千里  
Iwasaki, C.

2次で退化した楕円型作用素についての結果は様々存在するが、より高次の退化した作用素の基本解の構成に関する論文は多くない。2次以上の退化をする Grushin 型作用素についての基本解の統一的な構成方法を確立した。その方法は2次の退化に帰着させ、変形 Bessel 関数を使うことを経由するが、核関数を具体的に表示することができる。この結果は ISAAC Congress (ポーランド) および Greifswald (ドイツ) の研究集会等で発表して、現在二つの論文として纏めて投稿中である。

## III 実関数論的な手法における偏微分方程式の解の研究

Study of Solutions to P.D.E. by Methods of Harmonic Analysis

保城寿彦  
Hoshiro, T.

本課題では停留位相の方法、複素補間といった調和解析学の手法によって偏微分方程式の解について研究する。具体的には非線形初期値問題で基本的な分散型方程式の smoothing effect や制限定理などを対象とする。また数理物理学で重要な極限吸収の原理や Schroedinger 作用素の負の固有値数についての評価についても考察する。スペクトル理論で極限吸収の原理を証明するために発明された Mourre の方法を分散型方程式の初期値問題における平滑化作用 (smoothing effect) の証明に応用した。これによって多くの変数係数の分散型方程式においても平滑化作用がおこっていることがわかった。また超局所解析的手法を用いて平滑化作用が起こるための必要条件を示した。

## IV ホモロジー殻の二種類の殻同値

Two kinds of shell equivalence for  
homological shells

遊佐 毅

Usa, T.

ホモロジー殻に関する理論がひとつの理想の姿としているものにガロワ理論がある。ガロワ理論ではガロワ拡大体の中間体の振る舞いをガロワ群の部分群を持って統制するわけだが、我々は固定された射影部分多様体  $X$  をガロワ拡大体に見立て、そのホモロジー殻  $W$  を中間体の対応物と見なし、その挙動を  $W$  の余法ベクトル束の  $X$  への制限ベクトル束が与える、 $X$  の余法ベクトル束の自然な部分ベクトル束やそれらが誘導する障害類によって統制しようというわけだ。すでに、 $W$  が超曲面である場合には理想的な形で双方向の対応が得られ、その動きは完全に統制されている。ただしその場合、超曲面  $W$  の集団の方にも適切な同値関係を導入する必要があり、対応はその同値関係込みで成立している。そこで、その同値関係を一般のホモロジー殻に対しても拡張し、定義する必要がある。今回、その拡張した定義を見つけることができ、それを「狭義殻同値」と呼ぶことにした。さらに Tor-Betti 数定常に類似した概念として「弱殻同値」という概念も同時に定義した。ホモロジー殻に関するこれら二種類の同値性「狭義殻同値」と「弱殻同値」が定める族がどのような振る舞いをするか具体例で調べることにした。この場合、Tor-Betti 数の不等号だけを元に構成できる「極大包含図式」だけでは不十分で、幾何学的な包含関係の存在も保証された「(狭義) 包含図式」が必要となるために、「(狭義) 包含図式」も構成されている種数 5 の標準曲線  $X$  に限定して調べた。標準曲線  $X$  がトリゴナルで  $W$  の次数が 5 の時の狭義殻同値族を唯一の例外とし、それ以外はすべて決定することができた。

## V ランダムウォークと安定過程の最大値の漸近性の精密化

Asymptotic Behaviour of Maximum for Random Walks and stable Processes

平野克博

Hirano, K.

一次元ランダムウォークが Spitzer の条件を満足するとき時刻  $n$  までは原点に戻らない確率の  $n \rightarrow \infty$  としたときの漸近性は古くから知られていた。その精密化である 時刻  $n$  で初めて原点に戻る確率の漸近性については、安定分布の吸引域に属するランダムウォークに限り Vatutin-Wachtel が示した。本研究ではそれをさらに拡張し 時刻  $n$  で固定点  $x > 0$  を超える確率の漸近性と再生関数との関係を得ることに部分的に成功した。

この方法の副産物として安定過程の最大値の漸近性について以下の結果を得た。まず 時刻  $t$  までの最大値の分布関数の  $t \rightarrow 0$  とした漸近性を密度関数の漸近性に精密化し、極限の定数が特殊関数で表されることを示した。次に  $t \rightarrow \infty$  での漸近性をやはり密度関数の下極限の漸近性に拡張した。上極限に関してはまだ未解決である。

## VI 一般の孤立特異点にたいする 斉藤 flat coordinate の拡張について

赤堀隆夫  
Akahori, T.

Calabi-Yau 多様体の moduli space の研究は数理物理の string theory と関連して活発になっている。一方、孤立特異点是非コンパクトではあるが数々の点で完備代数多様体と似た構造をもつ。本研究は孤立特異点の実境界 (CR 多様体) の観点から moduli の研究をする。下記 [VI-1] の論文で提起された方法で具体的に  $A_1$  特異点、Homogeneous polynomial hypersurface isolated singularities の Kodaira-Spencer class を書き上げた (Levi 計量に関する調和形式を具体的に与えた)。

## VII ディラック作用素のスペクトルの性質 Spectral properties of Dirac operators scalar potentials

榎田登美男  
Umeda, T.

本研究が対象とする作用素はスカラー・ポテンシャルを持つディラック作用素であって、質量パラメータがゼロの場合に現れる作用素である。この作用素のスペクトルが実軸全体に一致するための、スカラー・ポテンシャルに対する最小限の条件を求めるのが目的である。完全解決には至っていないが、かなり一般的な十分条件は求まった。周期ポテンシャルも扱えることが解った。状況は非常に複雑であるとの知見が得られた。

## VIII 相対論的シュレディンガー作用素の スペクトル散乱理論

On the study of spectral and scattering theory  
for relativistic Schrödinger operators

楳田登美男  
Umeda, T.

空間次元が3の場合に、相対論的シュレディンガー作用素の散乱行列のゼロ・エネルギー漸近挙動を調べた。ゼロ・エネルギーが固有値であるか、否かが大きな影響を及ぼすことが解明できた。さらに、相対論的シュレディンガー作用素がゼロ・エネルギーを固有値に持つのは稀であることを関数解析的手法で示した。

## IX 四元数ユニタリ群上の保型形式の算術性

Arithmeticity of modular forms on quaternion unitary groups

山内淳生  
Yamauchi, A.

四元数体上のユニタリ群  $Sp(1,1)$  上の保型形式の算術性について考察している。これまで、この群上の四元数離散系列を生成する保型形式は、存在は知られていたが、具体的にどのような Fourier 展開を持つのかなどは全く知られていなかった。それに対して、 $U(2,2)$  上の正則なベクトル値 theta 級数を構成して引き戻すことで、具体的に代数的な Fourier 係数を持つ  $Sp(1,1)$  上の保型形式の例を与えた。(成田宏秋 熊本大学准教授との共同研究)。現在考察しているのは、 $Sp(2,1)$  上の Eisenstein 級数を  $Sp(1,1)$  に引き戻した保型形式がどのような性質を持ち、Fourier 係数がどのような数になるか、という課題である。また、成田によって構成された  $Sp(1,1)$  上の Eisenstein 級数の Fourier 係数の算術性についても調べている。

## X 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の解析

Analysis of solutions to partial differential equations  
with piecewise smooth coefficients

永安 聖  
Nagayasu, S.

区分的に滑らかな関数を係数とする偏微分方程式の解、或いは対応する偏微分作用素の基本解の解析を行った。我々の身の回りには、介在物を含むような媒体が沢山ある。そして、そのような媒体に対して起こる現象を偏微分方程式を用いて調べる際には、その偏微分方程式の係数は区分的に滑らかとなる。そのため、この種の方程式の解析は非常に重要である。区分的に滑らかな関数を係数とする放物型作用素の基本解については、基本解自身の各点評価に関しては既によく知られているが、我々の最近の研究(樊・金・永安・中村)により、上からの各点勾配評価を得ることができた。

# XI シュレディンガー方程式に対する係数決定逆問題に於いて， 振動数が安定性に与える影響

Increasing stabilities in inverse problems for the acoustic equation

永安 聖  
Nagayasu, S.

シュレディンガー方程式に対する係数決定逆問題の安定性が、振動数を大きくしたときにどうなるかについて調べた。その結果、Isakov 氏・Uhlmann 氏・王氏との共同研究により、シュレディンガー方程式の逆問題に対するある安定性評価を得ることができた。そしてその評価は、振動数を大きくすると安定性も良くなる、ということを示唆していると思われる評価である。特に、以前研究した音響方程式の場合とは異なり、シュレディンガー方程式の逆問題の場合には、安定性評価に現れるある係数が、振動数に関して指数増大ではなく多項式増大にできることが分かった。この評価を得る際の鍵は、シュレディンガー方程式特有のある複素幾何光学解を用いることである。

## 発表論文 List of Publications

- I-1 C.Iwasaki : A representation of the fundamental solution and eigenfunction expansion to the Fokker-Planck operator, *Fourier Analysis, Pseudo-Differential Operators, Time-Frequency Analysis and Partial Differential Equations*, 査読有 p.211-p.233, Birkhäuser (2014).
- I-2 岩崎千里 : 退化した放物型方程式に対する基本解の表象による表現とその応用, 平成 25 年 9 月, 日本数学会秋季総合分科会函数解析学特別講演, 愛媛大学 (愛媛県)
- I-3 岩崎千里 : 退化した放物型方程式に対する基本解の表象による表示と nilmanifold 上の spectral zeta function, 平成 25 年 9 月, RIMS 共同研究「微分方程式に対する幾何解析の展開」, 京都大学数理解析研究所 (京都府)
- II-1 C. Iwasaki : Construction of the fundamental solution for a Grushin type operator and its application, 平成 25 年 8 月, ISAAC-2013, Krakow (ポーランド)
- II-2 C. Iwasaki : Construction of the fundamental solution for a Grushin type operator and its application, 平成 25 年 8 月, Workshop Analysis: Sub-Riemannian Geometry, Greifswald (ドイツ)
- II-3 C. Iwasaki : Construction of a fundamental solution for a Grushin type operator and its application to the Kohn-Laplacian, 平成 25 年 11 月, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis 2013, 東京理科大学 (千葉県)
- III-1 T. Hoshiro : Resonances of the Dirac operator on manifolds ; examples in hyperbolic surfaces, 偏微分方程式 姫路研究集会 講演 2014-2-21.
- IV-1 T.Usa : Homological shells of a canonical curve of genus 5 or 6 (I), *Report of Univ. of Hyogo*, No.23, pp.1-12 (2012).

- IV-2 T.Usa : Homological shells of a canonical curve of genus 5 or 6 (II) (plane quintic type), Report of Univ. of Hyogo, No.24, pp.1-13 (2013).
- IV-3 T.Usa : Homological shells of a canonical curve  $g = 5, 6$ , 日本数学会 (代数分科会) 京都大学、2013-03-20.
- IV-4 T.Usa : Homological shells of a canonical curve of low genus, 第 11 回代数曲線論国際シンポジウム、首都大学東京、2013-12-22.
- IV-5 T.Usa : Two kinds of shell equivalence in the inclusion family of a canonical curve with genus 5, 代数幾何学ワークショップ, 多可町公民館, 2014-02-23.
- VII-1 T. Umeda : Schnol's theorem and spectral properties of massless Dirac operators with scalar potentials (2012), RIMS Kyokuroku Bessatu B45 (2014), 25 - 30. (Joint work with K.M. Schmidt)
- VIII-1 T. Umeda : Low energy spectral and scattering theory for relativistic Schrödinger operators, to appear in Hokkaido Mathematical Journal. (Joint work with S. Richard)
- X-1 J. Fan, K. Kim, S. Nagayasu, G. Nakamura : A gradient estimate for solutions to parabolic equations with discontinuous coefficients, Electronic Journal of Differential Equations 2013 (2013), No. 93, 1-24.
- XI-1 V. Isakov, S. Nagayasu, G. Uhlmann, J.-N. Wang : Increasing stability of the inverse boundary value problem for the Schrödinger equation, Contemporary Mathematics 615 (2014), 131-141.

## 科学研究費補助金等

- 1 学術振興会科学研究費補助金 (平成 24 ~ 26 年度) 基盤研究 (C) 課題番号:24540189  
 研究課題 熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用  
 研究代表者 岩崎千里
- 2 学術振興会科学研究費補助金 (平成 25 ~ 28 年度) 基盤研究 (C) 課題番号: 25400210  
 研究課題 再生核理論を用いたソボレフ不等式の最良評価とその応用  
 研究分担者 榎田登美男
- 3 学術研究助成基金助成金 (平成 23 ~ 25 年度) 若手研究 (B) 課題番号: 23740110  
 研究課題 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の更なる解析, 及び逆問題への応用  
 研究代表者 永安 聖