

I 退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用

Construction of the fundamental solution for degenerate
parabolic operators and its applications

岩崎千里

Iwasaki, C.

退化した放物型方程式の基本解の構成に関しては、2次の退化の場合にのみしか詳しい形が分かっていない。この正確な形を利用して種々の熱作用素に対する基本解を得ることができる。その一つとして Nilmanifold に関する Bauer-Furutani-Iwasaki の共著論文が出版され、2011年9月に完成した球面上の共同研究の結果の投稿論文が受理された。さらに、この基本解の応用を Fokker-Planck 方程式に試みて、固有関数展開についての結果を得た。

II Dirac 作用素の局所指数定理について

Local index theorem for Dirac Operators

岩崎千里

Iwasaki, C.

放物型方程式の初期値問題に対する基本解の擬微分作用素の表象計算による構成法を工夫して、境界のある多様体の curvature との関係を示した。これは局所的な境界のある多様体に対する Gauss-Bonnet-Chern の定理の拡張である。この場合は境界のない場合と違って、時間変数に関する特異性が現れる。この方法を Dirac 作用素に適用して局所指数定理を得られた。この結果を 2009年の ISSAC Congress で発表してさらに論文として出版した。

III 実関数論的な手法における偏微分方程式の解の研究

Study of Solutions to P.D.E. by Methods of Harmonic Analysis

保城寿彦

Hoshiro, T.

本課題では停留位相の方法、複素補間といった調和解析学の手法によって偏微分方程式の解について研究する。具体的には非線形初期値問題で基本的な分散型方程式の smoothing effect や制限定理などを対象とする。また数理物理学で重要な極限吸収の原理や Schroedinger 作用素の負の固有値数についての評価についても考察する。スペクトル理論で極限吸収の原理を証明するために発明された Mourre の方法を分散型方程式の初期値問題における平滑化作用 (smoothing effect) の証明に応用した。これによって多くの変数係数の分散型方程式においても平滑化作用がおこっていることがわかった。また超局所解析的手法を用いて平滑化作用が起こるための必要条件を示した。

IV 種数 6 の一般標準曲線の良性ホモロジー殻

Good homological shells of a generic
canonical curve of genus 6

遊佐 毅

Usa, T.

種数 6 の標準曲線に対して現れる前幾何殻 (= ホモロジー殻) となるものの分類を試みたが、60 個近い候補が存在し、しかもお互いに密接に存在・非存在が関連しているために分類の実行は容易ならざることが分かった。そこで、目指す理論の概観像から見て害を及ぼさない程度に仮定できそうな条件について詳しく考察した結果、「良性ホモロジー殻」という概念を見出した。その条件を満たすものに限定することで、標準曲線の場合には、そのホモロジー殻が自動的に算術的コーヘン・マコーレイ性を獲得することが分かる。また、種数 6 の標準曲線のうち、「種数 6 の一般標準曲線」と呼ばれるモジュライの一般点に対応する場合には、かなり分類しやすい状況になることも分かった。ただしそれでも、2 次元スキームとなるホモロジー殻で二つほど正体が不明なものがあり、取り敢えず、今回はその二つの場合については、「存在」の方の研究から着手してみた。まずそのシチジーの次数分布を眺めると、昨年見つけた、種数 5 のトリゴナル標準曲線に対して現れる 5 次曲面に非常に良く似ていることが分かり、その 5 次曲面をホモロジー殻の包含関係から成る樹形図の面から見直すと、もう一次元高いホモロジー殻の中で特別な型のカルティエ因子となっていることも分かった。そこで種数 6 の一般標準曲線の場合にも、その類似で 2 次元スキームとなるホモロジー殻のさらに外側にある三次元のホモロジー殻の分類を元に、その中で類似の型のカルティエ因子を考察することで「存在」を示すことができた。その副産物として、種数 5 のトリゴナル標準曲線に対しては「常に」懸案の 5 次曲面が出現することも示せた。

V ランダムウォークと安定過程の最大値の漸近性の精密化

Asymptotic Behaviour of Maximum for Random Walks and stable Processes

平野克博

Hirano, K.

一次元ランダムウォークが Spitzer の条件を満足するとき、時刻 n までは原点に戻らない確率の $n \rightarrow \infty$ としたときの漸近性は古くから知られていた。その精密化である時刻 n で原点に復帰する確率の漸近性については、最近になって安定分布の吸引域に属するランダムウォークに関してほぼ完全な一般化がなされたが、本研究ではそれをさらに拡張し、時刻 n で固定点 x を超える確率の漸近性と再生関数との関係を得ることに部分的に成功した。

この方法の副産物として安定過程の最大値の漸近性について以下の結果を得た。まず時刻 t までの最大値の分布関数の $t \rightarrow 0$ とした漸近性を密度関数の漸近性に精密化し、極限の定数がガンマ関数で表されることを示した。次に $t \rightarrow \infty$ での漸近性をやはり密度関数の下極限の漸近性に拡張した。上極限に関しては未解決である。

VI 一般の孤立特異点にたいする 斉藤 flat coordinate の拡張について

赤堀隆夫
Akahori, T.

Calabi-Yau 多様体の moduli space の研究は数理物理の string theory と関連して活発になっている。一方、孤立特異点是非コンパクトではあるが数々の点で完備代数多様体と似た構造をもつ。本研究は孤立特異点の実境界 (CR 多様体) の観点から moduli の研究をする。下記 [VI-1] の論文で提起された方法で具体的に A_1 特異点、Homogeneous polynomial hypersurface isolated singularities の Kodaira-Spencer class を書き上げた (Levi 計量に関する調和形式を具体的に与えた)。

VII Dirac 作用素のスペクトル理論的研究 On the study of spectral theory of Dirac operators

榎田登美男
Umeda, T.

本研究が対象とする作用素は磁場のディラック作用素において質量パラメータがゼロの場合に現れる作用素である。ベクトルポテンシャルが遠方である程度速く減衰する場合を研究している。この場合には、物質の安定性の数学的理論において、Weyl-Dirac 作用素のゼロ固有値に属する固有関数 (ゼロモード) が重要な働きをすることが知られている。しかし、ゼロモードそれ自身についての知見はほとんど得られていなかった。本研究ではゼロモードの遠方での漸近挙動について完全に解明した。

VIII 四元数ユニタリ群上の保型形式の算術性

Arithmeticity of modular forms on quaternion unitary groups

山内淳生

Yamauchi, A.

四元数体上のユニタリ群 $Sp(1,1)$ 上の保型形式の算術性について考察している。これまで、この群上の四元数離散系列を生成する保型形式は、存在は知られていたが、具体的にどのような Fourier 展開を持つのかなどは全く知られていなかった。それに対して、 $U(2,2)$ 上の正則なベクトル値 theta 級数を構成して引き戻すことで、具体的に代数的な Fourier 係数を持つ $Sp(1,1)$ 上の保型形式の例を与えた(成田宏秋 熊本大学准教授との共同研究)。今後は、それ以外の例を与え、その算術性などを考え、この四元数離散系列を生成する保型形式の空間が、全体としてどのような性質を持っているかを明らかにしていきたい。

IX 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の解析

Analysis of solutions to partial differential equations
with piecewise smooth coefficients

永安 聖

Nagayasu, S.

区分的に滑らかな関数を係数とする偏微分方程式の解、或いは対応する偏微分作用素の基本解の解析を行った。我々の身の回りには、介在物を含むような媒体が沢山ある。そして、そのような媒体に対して起こる現象を偏微分方程式を用いて調べる際には、その偏微分方程式の係数は区分的に滑らかとなる。そのため、この種の方程式の解析は非常に重要である。区分的に滑らかな関数を係数とする放物型作用素の基本解については、基本解自身の各点評価に関しては既によく知られているが、我々の最近の研究(樊・金・永安・中村)により、上からの各点勾配評価を得ることができた。

X 音響方程式に対する係数決定逆問題に於いて、 振動数が安定性に与える影響

An Increasing stability in an inverse problem for the acoustic equation

永安 聖

Nagayasu, S.

方程式 $[\Delta + k^2 q(x)]u(x) = 0$ に対する係数決定逆問題の安定性が、振動数 k を大きくしたときにどうなるかについて調べた。その結果、Uhlmann 氏と王氏との共同研究により、ある安定性評価を得ることができた。そしてその評価は、振動数を大きくすると安定性も良くなる、ということを示唆していると思われる評価である。しかしながら、まだ評価の optimality については得られておらず、この optimality を得ることはこれからの課題である。

発表論文 List of Publications

- I-1 W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki : Spectral zeta function of the subLaplacian on two step nilmanifolds, Journal de Mathematiques pures et appliquees, Vol.97,242-261 (2011) .
- I-2 W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki : Trivialization of sub-Riemannian structures on spheres, Bulletin des Sciences Mathematiques, (2012) (to appear).
- I-3 K.Furutani-C.Iwasaki-T.Kagawa: An action function for a higher step Grushin operator, Journal of Geometry and Physics, (2012) (to appear).
- I-4 C.Iwasaki : A representation of the fundamental solution to the Fokker-Planck operator, 平成 23 年 9 月ゲッチンゲン (ドイツ), 数学教室コロキウム .
- I-5 C.Iwasaki : A representation of the fundamental solution to the Fokker-Planck operator, 平成 23 年 12 月 Fu-Jen 大学 (台湾) , Fu-Jen Form on Analysis .
- I-6 C.Iwasaki : Spectral zeta function of the sub-Laplacian on nilmanifolds, 平成 23 年 12 月 NCTS (台湾) , 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis .
- I-7 岩崎千里 : Symbols of the fundamental solution and spectral zeta function of nilmanifolds, 平成 24 年 2 月姫路, 偏微分方程式姫路研究集会 .
- I-8 C.Iwasaki : A representation of the fundamental solution and eigenfunction expansion to the Fokker-Planck operator, 平成 24 年 3 月 University of Potsdam (ドイツ) , Workshop Geometric and Singular Analysis .
- II-1 C. Iwasaki : Calculus of pseudo-differential operators and a local index of Dirac operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol.213,123-136 (2011).
- III-1 T. Hoshiro : Non linear eigenvalue problems and related topics, 26th Matsuyama Camp : Recent Development on Partial Differential Equations, 106-111(2011).
- IV-1 T.Usa : Homological shell surfaces with degree 5 of a trigonal canonical curve of genus 5, Report of Univ. of Hyogo, No.21, pp.1-21 (2010).
- IV-2 T.Usa : Homological shells of a projective variety with $\mathbb{C}P^2$ -genus 0, Report of Univ. of Hyogo, No.22, pp.1-12 (2011).

- VI-1 T. Akahori : The notion of CR Hamiltonian flows and the local embedding problem for CR structures, Emerging Topics on Differential Geometry (Nova Science Publishers), 79-94 (2010).
- VI-2 赤堀隆夫 : 孤立特異点の境界上の contact structure、2010 年春季日本数学会特別講演、慶応義塾大学、2010 年 3 月.
- VII-1 T. Umeda : Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators, Reviews Math. Phys. 23 (2011), 155 - 178. (Joint work with Y. Saitō)
- VII-2 T. Umeda : The Dirac-Hardy and Dirac-Sobolev Inequalities in L^1 , Publ. RIMS Kyoto Univ. 47 (2011), 791- 801. (Joint work with A. Balinsky and W.D. Evans)
- VII-3 T. Umeda : A sequence of zero modes of Weyl-Dirac operators and an associated sequence of solvable polynomials, Operator Theory; Advances and Applications 219 (2012), 197-209. (Joint work with Y. Saitō)
- X-1 永安 聖・Gunther Uhlmann・Jenn-Nan Wang :
Increasing stability in an inverse problem for the acoustic equation,
微分方程式の総合的研究、2011 年 12 月 17 日.

科学研究費補助金等

- 1 学術振興会科学研究費補助金 (平成 21 ~ 23 年度) 基盤研究 (C) 課題番号:21540194
研究課題 熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用
研究代表者 岩崎千里
- 2 学術振興会科学研究費補助金 (平成 22 ~ 23 年度) 挑戦的萌芽研究課題番号: 22654019
研究課題 準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素
研究代表者 保城寿彦
- 3 学術振興会科学研究費補助金 (平成 21 ~ 24 年度) 基盤研究 (C) 課題番号: 21540193
研究課題 閾値エネルギーにおける量子ハミルトニアンの特異点解析
研究代表者 榎田登美男
- 4 学術研究助成基金助成金 (平成 23 ~ 25 年度) 若手研究 (B) 課題番号: 23740110
研究課題 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の更なる解析、及び逆問題への応用
研究代表者 永安 聖