

I Dirac 作用素の局所指数定理について

Local index theorem for Dirac Operators

岩崎千里

Iwasaki, C.

放物型方程式の初期値問題に対する基本解の擬微分作用素の表象計算による構成法工夫して、境界のある多様体の *curvature* との関係を明らかにした。これは局所的な境界のある多様体に対するガウス-ボンネーチャ-ンの定理の拡張である。この場合は境界のない場合と違って、時間変数に関する特異性が現れる。この方法を Dirac 作用素に適用して局所指数定理を得られた。この結果を 2009 年の ISSAC Congress で発表してさらに論文として出版した。

II 退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用

Construction of the fundamental solution for degenerate
parabolic operators and its applications

岩崎千里

Iwasaki, C.

退化した放物型方程式の基本解の構成に関しては、2 次の退化の場合にのみしか詳しい形が分かっていない。この正確な形を利用して種々の熱作用素に対する基本解を得ることができる。これについては、古谷-Chang-Calin の 4 人で、基本解の様々な構成方法について記述した英文の本を Birkhauser 社から出版した。さらに Nilmanifold に関する近年の結果である Bauer-Furutani-Iwasaki の共著論文が出版され、さらに 3 人でこの結果を発展させる研究についての論文が受理され出版予定である。

III 実関数論的な手法における偏微分方程式の解の研究

Study of Solutions to P.D.E. by Methods of Harmonic Analysis

保城寿彦

Hoshiro, T.

本課題では停留位相の方法、複素補間といった調和解析学の手法によって偏微分方程式の解について研究する。具体的には非線形初期値問題で基本的な分散型方程式の smoothing effect や制限定理などを対象とする。また数理論理学で重要な極限吸収の原理や Schroedinger 作用素の負の固有値数についての評価についても考察する。スペクトル理論で極限吸収の原理を証明するために発明された Mourre の方法を分散型方程式の初期値問題における平滑化作用 (smoothing effect) の証明に応用した。これによって多くの変数係数の分散型方程式においても平滑化作用が起きていることがわかった。また超局所解析的手法を用いて平滑化作用が起こるための必要条件を示した。

IV 種数 5 のトリゴナル標準曲線のホモロジー殻となる 5 次曲面

Homological shell surfaces with degree 5 of a trigonal canonical curve of genus 5

遊佐 毅

Usa, T.

古典的な射影埋め込みの研究によく現れる例を模範として、幾何殻及び、その特異点に関する局所的な条件を外した、より一般的なホモロジー殻 (前幾何殻を改名) という概念をかつて導入した。これを使って、射影埋め込みの幾何学的組成列を構成することを目指し、その構成因子の候補であるこれらの基本的な性質に関して研究している。「幾何学的組成列」という概念は群論におけるジョルダン・ヘルダー列の代数幾何における類似である。当面は、とりあえず一般論から一旦離れて、具体例を調べることを目標に、種数の低い標準曲線のホモロジー殻を分類している。特に、最近になって見つかった、種数 5 のトリゴナル標準曲線に対して現れる 5 次曲面で新しいタイプのホモロジー殻となるものの具体例について詳しく調べている。ひとつは種数 5 のトリゴナル標準曲線をうまく設定し、前年度の研究結果であるシチジーの構造論を経由して、具体的に 5 次曲面の高次連立方程式を与えてホモロジー殻を構成し、その特異性については排除できないことが分かる。そこでこれまで非特異なものに限られていた 5 次曲面の双有理分類を特異な場合も含められるように結果を拡張した。また与えられた 5 次曲面が、種数 5 のトリゴナル標準曲線のホモロジー殻になる必要十分条件を与え、それを利用してトリゴナル標準曲線のホモロジー殻になる 5 次曲面の幾何的な構成も行った。またこれが古典的にまったく別の形で得られていたカステルヌーボー曲面に一致することも示した。

V ランダムウォークと安定過程の最大値の漸近性の精密化

Asymptotic Behaviour of Maximum for Random Walks and stable Processes

平野克博

Hirano, K.

一次元ランダムウォークが Spitzer の条件を満足するとき時刻 n までは原点に戻らない確率の $n \rightarrow \infty$ としたときの漸近性は古くから知られていた。その精密化である時刻 n で原点に復帰する確率の漸近性については最近になって安定分布の吸引域に属するランダムウォークに関してほぼ完全な一般化がなされたが、本研究ではそれをさらに拡張し時刻 n で固定点 x を超える確率の漸近性と再生関数との関係を得ることに部分的に成功した。

この方法の副産物として安定過程の最大値の漸近性について以下の結果を得た。まず時刻 t までの最大値の分布関数の $t \rightarrow 0$ とした漸近性を密度関数の漸近性に精密化し、極限の定数がガンマ関数で表されることを示した。次に $t \rightarrow \infty$ での漸近性をやはり密度関数の下極限の漸近性に拡張した。上極限に関しては未解決である。

VI 一般の孤立特異点にたいする 斉藤 flat coordinate の拡張について

赤堀隆夫
Akahori, T.

Calabi-Yau 多様体の moduli space の研究は数理物理の string theory と関連して活発になっている。一方、孤立特異点是非コンパクトではあるが数々の点で完備代数多様体と似た構造をもつ。本研究は孤立特異点の実境界 (CR 多様体) の観点から moduli の研究をする。下記 [VI-1] の論文で提起された方法で具体的に A_1 特異点、Homogeneous polynomial hypersurface isolated singularities の Kodaira-Spencer class を書き上げた (Levi 計量に関する調和形式を具体的に与えた)。

VII Dirac 作用素のスペクトル理論的研究 On the study of spectral theory of Dirac operators

榎田登美男
Umeda, T.

本研究が対象とする作用素は磁場のディラック作用素において質量パラメータがゼロの場合に現れる作用素である。ベクトルポテンシャルが遠方である程度速く減衰する場合を研究している。この場合には、物質の安定性の数学的理論において、Weyl-Dirac 作用素のゼロ固有値に属する固有関数 (ゼロモード) が重要な働きをすることが知られている。しかし、ゼロモードそれ自身についての知見はほとんど得られていなかった。本研究ではゼロモードの遠方での漸近挙動について完全に解明した。

VIII 四元数ユニタリ群上の保型形式の算術性

Arithmeticity of modular forms on quaternion unitary groups

山内淳生

Yamauchi, A.

四元数体上のユニタリ群 $Sp(1,1)$ 上の保型形式の算術性について考察している。これまで、この群上の四元数離散系列を生成する保型形式は、存在は知られていたが、具体的にどのような Fourier 展開を持つのかなどは全く知られていなかった。それに対して、 $U(2,2)$ 上の正則なベクトル値 θ 級数を構成して引き戻すことで、具体的に代数的な Fourier 係数を持つ $Sp(1,1)$ 上の保型形式の例を与えた(成田宏秋 熊本大学准教授との共同研究)。今後は、それ以外の例を与え、その算術性などを考え、この四元数離散系列を生成する保型形式の空間が、全体としてどのような性質を持っているかを明らかにしていきたい。

IX 波を貫通する未知障害物の、音響散乱による再構成

Reconstruction of penetrable obstacles in acoustic scattering

永安 聖

Nagayasu, S.

波を貫通させる障害物(介在物)を、遠方での観測から推定する逆問題を考える。特に、介在物 D を含むある大きな既知の領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上でのデータにより定義されるディリクレ・ノイマン写像から、未知の介在物 D を再構成することを考える。この逆問題に対し、空間次元が2次元の場合に、多項式型の複素幾何光学解を使い、囲い込み法を適用することで、未知介在物 D のかなり詳細な情報を得ることができることを示した。

X 区分的に滑らかな係数を持つ偏微分方程式の解の解析

Analysis of solutions to partial differential equations
with piecewise smooth coefficients

永安 聖

Nagayasu, S.

区分的に滑らかな関数を係数とする偏微分方程式の解、或いは対応する偏微分作用素の基本解の解析を行った。我々の身の回りには、介在物を含むような媒体が沢山ある。そして、そのような媒体に対して起こる現象を偏微分方程式を用いて調べる際には、その偏微分方程式の係数は区

分的に滑らかとなる。そのため、この種の方程式の解析は非常に重要である。区分的に滑らかな関数を係数とする放物型作用素の基本解については、基本解自身の各点評価に関しては既によく知られているが、我々の最近の研究 (樊・金・永安・中村) により、上からの各点勾配評価を得ることができた。

発表論文 List of Publications

- I-1 C. Iwasaki : Calculus of pseudo-differential operators and a local index of Dirac operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol.213,123-136 (2011).
- II-1 W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki : Spectral Analysis and Geometry of Sub-Laplacian and Related Grushin-type Operators, Operator Theory, Advances and Applications, Vol.211 (2010), 183-290.
- II-2 O.Calin, D-C.Chang, K.Furutani, C.Iwasaki : Heat Kernels for Elliptic and Sub-elliptic Operators, Methods and Techniques, Birkhauser(2010).
- II-3 W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki : Spectral zeta function of the subLaplacian on two step nilmanifolds, Journal de Mathematiques pures et appliquees,(2011) (to appear).
- II-4 C.Iwasaki : A representation of the fundamental solution to some heat equation and its applications, 平成 22 年 6 月ゲッチンゲン (ドイツ) Workshop on Fourier Analysis and Partial Differential Equations
- II-5 C.Iwasaki : 退化した放物型方程式に対する基本解の表象による表現とその応用、平成 22 年 8 月、野田市 (千葉) 関数解析・実関数論合同シンポジウム
- II-6 C.Iwasaki : Construction of the fundamental solutions and spectral functions of nilmanifolds, 平成 23 年 1 月京都、第 26 回松山キャンプ: Recent Development on Partial Differential Equations.
- III-1 T. Hoshiro : Non linear eigenvalue problems and related topics, 26th Matsuyama Camp : Recent Development on Partial Differential Equations, 106-111(2011).
- IV-1 T.Usa : Pregeometric Shells of a Canonical Curve of genus 5, Report of Univ. of Hyogo, 20, 1-15 (2009).
- IV-2 T.Usa : Homological shell surfaces with degree 5 of a trigonal canonical curve of genus 5, Report of Univ. of Hyogo, No.21, pp.1-21 (2010)
- VI-1 T. Akahori : The notion of CR Hamiltonian flows and the local embedding problem for CR structures, Emerging Topics on Differential Geometry (Nova Science Publishers), 79-94 (2010).
- VI-2 赤堀隆夫 : 孤立特異点の境界上の contact structure、2010 年春季日本数学会特別講演、慶応義塾大学、2010 年 3 月.

- VII-1 T. Umeda : Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators, *Reviews Math. Phys.* 23 (2011), 155 - 178. (Joint work with Y. Saitō)
- VII-2 T. Umeda : Threshold eigenfunctions and threshold resonances of some quantum Hamiltonians, *AIMS Conference 2010, Dresden, Germany.* (Joint work with Y. Saitō)
- VII-3 T. Umeda : A sequence of zero modes of Weyl-Dirac operators and an associated sequence of solvable polynomials, to appear in “Spectral Theory, Function Spaces and Inequalities - New Techniques and Recent Trends”. (Joint work with Y. Saitō)
- VII-4 T. Umeda : The Dirac-Hardy and Dirac-Sobolev Inequalities in L^1 , *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 47 (2011), 791- 801. (Joint work with A. Balinsky and W.D. Evans)
- IX-1 Sei Nagayasu, Gunther Uhlmann and Jenn-Nan Wang : Reconstruction of penetrable obstacles in acoustic scattering, *SIAM J. on Math. Anal.* 43, 189-211 (2011).

大学院物質理学研究科

博士後期課程

森田 務 : 学位論文題目「パウリ作用素のゼロ・モード、ゼロ・レゾナンス」
(平成 23 年 3 月修了)

原著論文 “Zero resonances of Pauli operators” *Funkcialaj Ekvacioj* (in press)

科学研究費補助金等

- 1 学術振興会科学研究費補助金 (平成 21 ~ 23 年度) 基盤研究 (C) 課題番号:21540194
研究課題 熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用
研究代表者 岩崎千里
- 2 学術振興会科学研究費補助金 (平成 22 ~ 23 年度) 挑戦的萌芽研究課題番号: 22654019
研究課題 準楕円性と磁場付きシュレジンガー作用素
研究代表者 保城寿彦
- 3 学術振興会科学研究費補助金 (平成 21 ~ 24 年度) 基盤研究 (C) 課題番号: 21540193
研究課題 閾値エネルギーにおける量子ハミルトニアンの特異値解析
研究代表者 榎田登美男
- 4 学術振興会科学研究費補助金 (平成 21 ~ 22 年度) 特別研究員奨励費課題番号: 09J00554
研究課題 偏微分方程式の逆問題の再構成手続きに関する研究
研究代表者 永安 聖