

I Dirac 作用素の局所指数定理について

Local index theorem for Dirac Operators

岩崎千里

Iwasaki, C.

放物型方程式の初期値問題に対する基本解の擬微分作用素の表象計算による構成法工夫して、境界のある多様体の *curvature* との関係を示した。これは局所的な境界のある多様体に対するガウス-ボンネーチャ-ンの定理の拡張である。この場合は境界のない場合と違って、時間変数に関する特異性が現れる。この方法を Dirac 作用素に適用して局所指数定理を得られた。この結果を 2009 年の ISSAC Congress で発表してさらに論文として出版される予定である。

II 退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用

Construction of the fundamental solution for degenerate parabolic operators and its applications

岩崎千里

Iwasaki, C.

退化した放物型方程式の基本解の構成に関しては、2 次の退化の場合にのみしか詳しい形が分かっていない。この正確な形を利用して種々の熱作用素に対する基本解を得ることができる。これについては、古谷-Chang-Calin の 4 人で共著の本を執筆して、出版の予定である。さら Nilmanifold に関する近年の結果である Bauer-Furutani-Iwasaki の共著論文が印刷中である。現在は 3 人でこの研究を発展させる研究に取りかかっている。

III 実関数論的な手法における偏微分方程式の解の研究

Study of Solutions to P.D.E. by Methods of Harmonic Analysis

保城寿彦

Hoshiro, T.

本課題では停留位相の方法、複素補間といった調和解析学の手法によって偏微分方程式の解について研究する。具体的には非線形初期値問題で基本的な分散型方程式の smoothing effect や制限定理などを対象とする。また数理物理学で重要な極限吸収の原理や Schroedinger 作用素の負の固有値数についての評価についても考察する。スペクトル理論で極限吸収の原理を証明するために発明された Mourre の方法を分散型方程式の初期値問題における平滑化作用 (smoothing effect) の証明に応用した。これによって多くの変数係数の分散型方程式においても平滑化作用が起きていることがわかった。また超局所解析的手法を用いて平滑化作用が起こるための必要条件を示した。

IV 種数 5 以下の標準曲線の前幾何殻

Pregeometric Shells of a Canonical Curve of genus 5

遊佐 毅
Usa, T.

古典的な射影埋め込みの研究によく現れる例を模範として、幾何殻及び、その特異点に関する局所的な条件を外した、より一般的な前幾何殻という概念をかつて導入した。これを使って、射影埋め込みの幾何学的組成列を構成することを目指し、その構成因子の候補であるこれらの基本的な性質に関して研究している。「幾何学的組成列」という概念は群論におけるジョルダン・ヘルダー列の代数幾何における類似である。ここでは、とりあえず一般論から一旦離れて、具体例を調べることを目標に、種数の低い標準曲線の前幾何殻を分類している。ここで、初めて、古典的な例では見られなかった新しい型の前幾何殻が見つかった。これに関する詳しい研究についてはこれからに待たれる。

V ランダムウォークと安定過程の最大値の漸近性の精密化

Asymptotic Behaviour of Maximum for Random Walks and stable Processes

平野克博
Hirano, K.

一次元ランダムウォークが Spitzer の条件を満足するとき時刻 n までは原点に戻らない確率の $n \rightarrow \infty$ としたときの漸近性は古くから知られていた。しかし、その精密化である時刻 n で原点に復帰する確率の漸近性については長い間平均 0 分散有限の場合にのみしか分からなかった。最近になって Spitzer の条件をみたす重要なクラスである安定分布の吸引域に属するランダムウォークに関してほぼ完全な一般化がなされたが、本研究ではそれをさらに拡張し時刻 n で固定点 x を超える確率の漸近性と再生関数との関係を得ることに部分的に成功した。条件として安定分布の二つのパラメーターに関する条件とランダムウォークの分布が整数値のみをとるという条件が必

要であったが、これらはいずれも必要でないと思われる。今後はこの条件を取り除くことが課題である。

この方法の副産物として安定過程の最大値の漸近性について以下の結果を得た。まず時刻 t までの最大値の分布関数の $t \rightarrow 0$ とした漸近性を密度関数の漸近性に精密化し、極限の定数がガンマ関数で表されることを示した。従来この定数は局所時間の正規化定数に依存していきちんと表現されないと思われていたものである。次に $t \rightarrow \infty$ での漸近性をやはり密度関数の下極限の漸近性に拡張した。上極限に関しては十分条件を得ることができたが、必要条件を得ることもしくは反例を得るには至っていない。

VI 一般の孤立特異点にたいする 斉藤 flat coordinate の拡張について

赤堀隆夫
Akahori, T.

Calabi-Yau 多様体の moduli space の研究は数理物理の string theory と関連して活発になっている。一方、孤立特異点是非コンパクトではあるが数々の点で完備代数多様体と似た構造をもつ。本研究は孤立特異点の実境界 (CR 多様体) の観点から moduli の研究をする。下記 [VI-1] の論文で提起された方法で具体的に A_1 特異点、Homogeneous polynomial hypersurface isolated singularities の Kodaira-Spencer class を書き上げた (Levi 計量に関する調和形式を具体的に与えた)。

VII Weyl-Dirac 作用素のスペクトル理論的研究 On the study of spectral theory of Weyl-Dirac operators

榎田登美男
Umeda, T.

本研究が対象とする作用素は磁場のディラック作用素において質量パラメータがゼロの場合に現れる作用素である。ベクトルポテンシャルが遠方である程度速く減衰する場合を研究している。この場合には、物質の安定性の数学的理論において、Weyl-Dirac 作用素のゼロ固有値に属する固有関数 (ゼロモード) が重要な働きをすることが知られている。しかし、ゼロモードそれ自身についての知見はほとんど得られていなかった。本研究ではゼロモードの遠方での漸近挙動について完全に解明した。

VIII 双曲型不動点における超局所解の伝播とその応用

Propagation of microlocal solutions at a hyperbolic fixed point

藤家雪朗

Fujiié, S.

シュレディンガー方程式の解の準古典（プランク定数を小さなパラメータとみた）漸近挙動と、応する古典力学系の関係を研究するのが準古典解析の目的である。

シュレディンガー方程式の解の超局所台が、古典力学系の解曲線に沿って伝播することはよく知られている。そこで古典力学系に不動点があったとき、そこを超えて超局所台が伝播するかどうか問題となる。不動点が双曲型るとき、エネルギーがある離散的な複素数値をとらない限り、超局所台は安定多様体から不安定多様体へと一意的に伝搬すること、さらに安定多様体に超局所解を与えて不安定多様体上の超局所解を構成する方法を示した。

この理論の散乱問題への応用として、ポテンシャルがある一点において非退化な最大値をとり、遠方では減衰しているシュレディンガー作用素を考える。最大値の近傍にレゾナンスと呼ばれるレゾルベントの極が存在する。この極を用いて時間発展作用素を記述すること、また散乱振幅の極（レゾルベントの極と一致する）における留数を計算することなどができた（Jean-François Bony, Thierry Ramond, Maher Zerzeri との共同研究）。

IX 解析的でないポテンシャルが生成するレゾナンス

Resonances created by non-globally analytic potential

藤家雪朗

Fujiié, S.

島の中の井戸型ポテンシャルは、井戸の底の近傍にレゾナンスと呼ばれるレゾルベントの極を生成することが知られている。この極は複素数で、虚部は準古典パラメータに関して指数的に小さいことが知られ、特にポテンシャルが大域的に解析的な場合、その漸近展開が知られている（Helffer-Sjöstrand）。解析性は、WKB 解をポテンシャルバリアを超えて（トンネル効果）接続する際、本質的な役割を果たす。この解析性を仮定せず、 C^∞ 級だけを仮定しても同じ結論が得られることを示した（Amina Lahmar-Benbernou, André Martinez との共同研究）。

X 錐状交差する 2 準位シュレディンガー作用素のレゾナンスの分布

Distribution of resonances for a 2-level Schrödinger operator with a conical intersection

藤家雪朗
Fujiié, S.

\mathbb{R}^2 上 2×2 系のシュレディンガー作用素の二つの固有ポテンシャルが錐状に交差するモデルについて、複素 WKB 法を用いてレゾナンスの準古典漸近分布を調べた (Caroline Lasser, Laurence Nedelec との共同研究)。

XI 四元数ユニタリ群上の保型形式の算術性

Arithmeticity of modular forms on quaternion unitary groups

山内淳生
Yamauchi, A.

四元数体上のユニタリ群 $\mathrm{Sp}(1,1)$ 上の保型形式の算術性について考察している。これまで、この群上の四元数離散系列を生成する保型形式は、存在は知られていたが、具体的にどのような Fourier 展開を持つのかなどは全く知られていなかった。それに対して、 $\mathrm{U}(2,2)$ 上の正則なベクトル値 θ 級数を構成して引き戻すことで、具体的に代数的な Fourier 係数を持つ $\mathrm{Sp}(1,1)$ 上の保型形式の例を与えた (成田宏秋 熊本大学准教授との共同研究)。今後は、それ以外の例を与え、その算術性などを考え、この四元数離散系列を生成する保型形式の空間が、全体としてどのような性質を持っているかを明らかにしていきたい。

発表論文 List of Publications

- I-1 C. Iwasaki : Construction of the fundamental solution and curvature of manifolds with boundary, Operator Theory: Advances and Applications,189,43-65 (2008).
- I-2 C.Iwasaki: Construction of the fundamental solution and curvature of manifolds, RIMS Kokyuroku Bessatu,10,133-148 (2008).
- I-3 C. Iwasaki : Calculus of pseudo-differential operators and a local index of Dirac operators, to appear.
- II-1 W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki: Spectral Analysis and Geometry of Sub-Laplacian and Related Grushin-type Operators, Operator Theory, Advances and Applications, 211(2010),183-290 (to appear).
- II-2 O.Calin, D-C.Chang, K.Furutani, C.Iwasaki: Heat Kernels for Elliptic and Sub-elliptic Operators, to appear.

- IV-1 T.Usa : Pregeometric Shell type Extensions of Graded Modules, Report of Univ. of Hyogo, 19, 1-18 (2008).
- IV-2 T.Usa : Pregeometric Shells of a Canonical Curve of genus 5, Report of Univ. of Hyogo, 20, 1-15 (2009).
- VI-1 T. Akahori : The notion of CR Hamiltonian flows and the local embedding problem for CR structures, Emerging Topics on Differential Geometry (Nova Science Publishers), 79-94 (2010).
- VI-2 赤堀隆夫 : 孤立特異点の境界上の contact structure, 2010 年春季日本数学会特別講演, 慶応義塾大学, 2010 年 3 月.
- VII-1 T. Umeda and Y. Saitō : The asymptotic limits of zero modes of massless Dirac operators, Lett. Math. Phys. 83, 97 - 106 (2008).
- VII-2 T. Umeda and Y. Saitō : The zero modes and the zero resonances of massless Dirac operators, Hokkaido Math. J. 37, 365 - 388 (2008).
- VII-3 T. Umeda and D.Wei : Generalized eigenfunctions of relativistic Schrödinger operators in two dimensions, Electr. J. Diff. Eqns. 2008, 1 - 18 (2008).
- VII-4 T. Umeda: Eigenfunctions of Dirac operators at the threshold energies, Seminar Notes of Mathematical Sciences 11, 126 - 134 (2008).
- VII-5 T. Umeda and Y. Saitō : Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators. 7th International ISAAC Congress, Imperial College, London, UK, 2009 年 7 月
- VII-6 T. Umeda and Y. Saitō : 2009 NCTS Taiwan-Norway Joint Workshop on Geometric Analysis and Mathematical Physics, National Center for Theoretical Sciences, Hsinchu, Taiwan, 2009 年 12 月.
- VII-7 T. Umeda and Saitō : Abstract Harmonic Analysis 2009, Kaohung, Taiwan, 2009 年 12 月
- VIII-1 Bony, J.-F., Fujiié, S., Ramond, T., Zerzeri, M. : Propagation of microlocal solutions through a hyperbolic fixed point, RIMS Kokyuroku Bessatsu B10, 1-32 (2008).
- IX-1 S.Fujiie, A.Lahmar-Benbernou, A.Martinez: Semiclassical complex interactions at a non-analytic turning point, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- X-1 S.Fujiie, C.Lasser, L.Nedelec : Semiclassical resonances for a two-level Schroedinger operator with a conical intersection, to appear in Asymptotic Analysis.

大学院物質理学研究科

博士後期課程

森田 務 : Pauli 作用素のスペクトル解析

科学研究費補助金等

- 1 文部科学省科学研究費補助金 (平成 20 ~ 21 年度) 基盤研究 (C) 課題番号:21540194
研究課題 熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用
研究代表者 岩崎千里
研究分担者 榎田登美男・保城寿彦・藤家雪朗
- 2 文部科学省科学研究費補助金 (平成 21 ~ 22 年度) 基盤研究 (C) 課題番号:21540195
研究課題 シュレディンガー方程式の準古典解析
研究代表者 藤家雪朗
研究分担者 岩崎千里・榎田登美男・保城寿彦
- 3 文部科学省科学研究費補助金 (平成 21 ~ 24 年度) 基盤研究 (C) 課題番号: 21540193
研究課題 閾値エネルギーにおける量子ハミルトニアンのスペクトル解析
研究代表者 榎田登美男